

# 宇宙诞生时的婴啼 ——来自暴胀的随机引力波背景\*

郭宗宽<sup>1,2,3,†</sup> 皮石<sup>1,4,5,††</sup>

- (1 中国科学院理论物理研究所 北京 100190)  
 (2 中国科学院大学物理科学学院 北京 100049)  
 (3 国科大杭州高等研究院基础物理与数学科学学院 杭州 310024)  
 (4 北京大学高能物理研究中心 北京 100084)  
 (5 东京大学 卡弗里数物连携宇宙研究机构 千叶 277-8583 日本)

2025-06-25 收到

† email: guozk@itp.ac.cn

†† email: shi.pi@itp.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20250704

CSTR: 32040.14.wl20250704

## The infant cry of the universe — stochastic gravitational wave background from inflation

GUO Zong-Kuan<sup>1,2,3,†</sup> PI Shi<sup>1,4,5,††</sup>

- (1 Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)  
 (2 School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)  
 (3 School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, University of Chinese Academy of Sciences, Hangzhou 310024, China)  
 (4 Center for High Energy Physics, Peking University, Beijing 100084, China)  
 (5 Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (Kavli IPMU), The University of Tokyo, Chiba 277-8583, Japan)

**摘要** 文章将介绍起源于宇宙极早期暴胀阶段的引力波。暴胀是宇宙热大爆炸开始之前的一段短暂的加速膨胀阶段，在暴胀期间，起源于量子扰动的曲率扰动和张量扰动都被拉伸到宏观尺度上。前者是大尺度结构和微波背景辐射各向异性的起源，后者则能形成原初引力波。在下一阶，曲率扰动的四极矩可以作为引力波源，特别是增强的曲率扰动同时能够形成大量原初黑洞和可观测的次级引力波，而后者是空间引力波探测的重要科学目标。

**关键词** 随机引力波，早期宇宙，暴胀，原初黑洞

**Abstract** This article recounts the origin of gravitational waves from the very birth of the universe. Cosmic inflation is the short period of accelerated expansion prior to the onset of the hot Big Bang. Initially generated from quantum fluctuations, both curvature and tensor perturbations are stretched to cosmological scales; the former serve as the seeds of large-scale structures and the anisotropies of the cosmic microwave background, while the latter form primordial gravitational waves. At the next order, the quadrupole moment of the curvature perturbations can also act as a source of gravitational waves. In particular, enhanced curvature perturbations can simultaneously form abundant primordial black holes and observable secondary gravitational waves. The latter constitute one of the key scientific goals for space-based gravitational wave detectors.

**Keywords** stochastic gravitational waves, early universe, inflation, primordial black holes

## 1 引言

人类对自然界的好奇心驱动着科学和社会的进步。宇宙是人类所能认识的最大客体，而宇宙的起源和演化则是人类探索的终极问题。自从哈勃观测到宇宙膨胀以来，宇宙学已成为精确的现代科学。随着观测精度的逐渐提高，人们已经渐渐认识到宇宙极早期(年龄约 $10^{-36}$  s到 $10^{-32}$  s时)曾经经历过一段短暂而剧烈的加速膨胀过程，称之为暴胀<sup>[1-5]</sup>。这段短暂的加速膨胀过程可以解决热大爆炸宇宙学中的一些理论疑难，例如宇宙为什么是空间平坦的、宇宙各个角度看上去为什么如此一致、为什么观测不到大统一理论预言的磁单极子，等等。

暴胀的物理本质仍然是一个开放的前沿科学问题，而唯象上来说可以用许多不同的模型实现。目前大部分科学家认为，暴胀由一个势函数非常平坦的标量场驱动。当标量场在势函数上滚动时，由于宇宙膨胀的动力学摩擦影响，很快到达吸引子状态，且暴胀场的动能远小于势能，因此暴胀场贡献的能量密度近似为一个宇宙学常数，能够驱动时空近指数式地加速膨胀。随着暴胀的持续，暴胀场逐渐滚动至其势函数的极小值点附近，其动能项逐渐增长。当暴胀场的动能项不能忽略时，暴胀结束，且暴胀场开始在势函数底部滚动并振荡。这时，暴胀场的能量会通过一系列复杂的参数共振过程——称为预加热和重加热——转移到与之耦合的粒子特别是标准模型的粒子中去，并很快实现局域热平衡。在这之后，宇宙进入辐射为主时期，我们通常说的热大爆炸宇宙就是指的这个阶段。

早在20世纪六七十年代，对星系、星系团等大尺度结构的统计已经发现，宇宙极早期必须存在一个近标度不变的原初曲率扰动，但其起源一直得不到很好的解释。暴胀宇宙学提出后，人们发现它可以把极小尺度上的时空量子扰动拉伸到宇宙学尺度上，自然地解释了曲率扰动的初始条

件<sup>[6]</sup>。最近几十年对微波背景辐射和星系巡天的观测已经进一步确认了原初曲率扰动的大小为 $10^{-5}$ <sup>[7]</sup>，且统计上是近似高斯的<sup>[8]</sup>，这反映了原初扰动的量子起源。

原初引力波是暴胀宇宙学的另一个重要预言，它由暴胀将张量形式的空间度规扰动拉伸到宇宙学尺度上而产生<sup>[9]</sup>。目前的原初引力波能量密度可以用暴胀时期的张量扰动谱除以物质辐射相等时刻的红移因子来估算，其结果小于 $10^{-16}$ 。这么小的强度在未来的引力波探测器上是很难探测到的。因此人们专注于原初引力波在微波背景辐射上产生的一种称为B模偏振的特殊图样。目前有多探测器对此进行进一步的探测，包括南极的BICEP2、KeckArray、日本的LiteBIRD、中国的AliCPT等。

十年前，激光干涉引力波天文台(LIGO)首次观测到来自双黑洞合并的引力波信号<sup>[10]</sup>，标志着引力波天文学和引力波宇宙学的诞生。目前，LIGO联合Virgo、KAGRA已经观测到数百例类似的引力波信号<sup>[11]</sup>。对这些信号的研究极大推进了人们对恒星形成与演化、黑洞物理、中子星物理、大尺度结构、哈勃常数测量等问题的认识。

除了已经探测到的时变信号之外，还有一种重要但还没有探测到的信号是来自不同方向的不相干引力波叠加而成的随机背景。这种随机引力波背景的存在不随时间变化，但是其能谱和引力波探测器的噪声谱不同。将多个独立引力波探测器的噪声数据取关联，就可以压低噪声，并以更高的灵敏度探测随机引力波背景。例如，遥远的双黑洞并合信号无法一一分辨出来，可以叠加出随机背景信号。但最重要的还是来自于早期宇宙尤其是暴胀的随机引力波信号。本文将主要讨论这一类引力波的产生机制。

## 2 引力波的基本知识

上面已经谈到原初引力波起源于暴胀期间时空本身的量子扰动。准确说来，这种量子扰动会使得在空间上局域地测量距离时发生变化。如果用时空线元来写的话，这种变化是：

\* 国家重点研发计划(批准号：2021YFC2203004)、国家自然科学基金(批准号：12475066；12447101)资助项目

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(\delta_{ij} + h_{ij})dx_i dx_j. \quad (1)$$

其中,  $t$  是物理时间,  $x_i$  是不随宇宙膨胀变化的坐标, 称为共动坐标,  $a$  是随时间变化的宇宙尺度因子。空间分量的张量形式度规扰动  $h_{ij}$  代表的就是引力波。它满足横向无迹条件:

$$\partial_i h_{ij} = 0, \delta_{ij} h_{ij} = 0. \quad (2)$$

因此引力波带来的距离变化总是垂直于传播方向, 且保持面积不变。爱因斯坦场方程的空间部分可以给出它的运动方程为

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{\nabla^2}{a^2} h_{ij} = \frac{16\pi G}{a^2} A^{kl}_{ij} S_{kl}. \quad (3)$$

其中,  $h$  上方一点表示对  $t$  求导数,  $H \equiv \dot{a}/a$  是宇宙的哈勃膨胀率,  $\nabla$  是空间梯度算符。  $S_{kl}$  是物质部分的胁强张量, 而  $A^{kl}_{ij}$  可以投影出它的横向无迹部分。在暴胀期间, 源项一般是通过流速度构造出来的, 是个二次型。因此张量扰动方程在线性阶是无源的, 其强度比较小, 难以探测。在下一阶, 曲率扰动或者额外标量场的四极矩也可以作为引力波的源, 这称为次级引力波。在一些有趣的物理过程中, 曲率扰动或者标量场可能会放大, 因此产生的次级引力波可能会超过原初引力波, 并更早在各类引力波探测器上被观测到。

宇宙学家习惯用引力波能量密度谱来描述引力波, 为此需要先定义引力波携带的能量。在广义相对论中, 由于等效原理和广义协变性的限制, 无法为引力场定义坐标无关的局域能量密度。然而, 在存在引力波的情况下, 度规的张量部分通常可以分解为低频缓变的背景度规和高频短波长的“引力波”度规两部分, 后者贡献的曲率张量做时间平均之后就可以用来定义等效的平均能量密度:

$$\rho_{\text{GW}} = \frac{1}{32\pi G} \left\langle \sum_{i,j=1}^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \right\rangle. \quad (4)$$

这种方法称为“短波长近似(short-wavelength approximation)”<sup>[12, 13]</sup>。利用这个引力波能量密度, 就能定义引力波能谱, 并进而仿照其他密度参数用宇宙的临界密度  $\rho_{\text{cr}}$  做归一化:

$$\Omega_{\text{GW}}(k) \equiv \frac{1}{\rho_{\text{cr}}} \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \ln k}. \quad (5)$$

很明显, 作为一种辐射, 来源于暴胀以及早期宇宙的引力波能谱不能大于今天宇宙中的辐射物质

的密度占比  $\Omega_{\text{GW}} \leq \Omega_r = 4.2 \times 10^{-5}$ 。但是来源于晚期宇宙、只在地球附近传播的随机引力波能谱则无此限制。

引力波探测器对随机引力波背景的探测能力可以用各探测器的噪声以及实验的运行时间算出<sup>[14, 15]</sup>。目前 LIGO 给出的限制是在  $f_{\text{ref}} = 25$  Hz 处  $\Omega_{\text{GW}} \leq 3.4 \times 10^{-9}$ <sup>[16]</sup>。未来的空间引力波探测天线(LISA)<sup>[17-20]</sup>、空间太极计划(Taiji)<sup>[21]</sup>、天琴计划(TianQin)<sup>[22, 23]</sup>等在  $10^{-3}$  Hz 频段能探测到  $\Omega_{\text{GW}} \sim 10^{-12}$ 。下一代空间引力波探测计划大爆炸探测器(BBO)<sup>[24]</sup>、分赫兹干涉引力波天文台(DECIGO)<sup>[25]</sup>能够在  $10^{-2}$  Hz 处探测到  $10^{-15}$ 。最近, 多个脉冲星计时阵列实验组 NANOGrav<sup>[26, 27]</sup>, EPTA+InPTA<sup>[28-30]</sup>, PPTA<sup>[31-33]</sup>, CPTA<sup>[34]</sup>, MeerKAT PTA<sup>[35]</sup>等都在纳赫兹( $10^{-9}$  Hz)频段探测到了超低频随机引力波背景存在的强烈证据, 其幅度在  $f_{\text{yr}} = 1 \text{ yr}^{-1} = 3.17 \times 10^{-8}$  Hz 的参考频率上为  $\Omega_{\text{GW}}(f_{\text{yr}}) = 3.6^{+2.4}_{-1.6} \times 10^{-9}$  (取 NANOGrav 的结果)。

### 3 暴胀期间的量子扰动和原初引力波

自从伽莫夫提出大爆炸宇宙学并得到微波背景辐射的观测证实以来, 大爆炸理论已经成为现代宇宙学的基石。然而, 随着观测精度的逐步提高, 传统的热大爆炸宇宙学也暴露出了一些问题。例如, 当我们从天空中两个相距较远的方向看过去时, 这两个方向上的微波背景辐射的温度在百万分之一的水平上惊人地相等, 而在早期宇宙中因果连通区域(称为“视界”)远小于这两点之间的距离, 因此没有任何物理过程能保证它们的温度相等, 这称为视界疑难。另外, 最近的观测表明宇宙在空间上是非常平坦的, 但空间曲率随着宇宙膨胀应该是越来越大, 因此这要求宇宙的初条件必须微调空间曲率才行。在 1980 年左右, 多位学者几乎同时考虑到, 如果在热大爆炸宇宙之前宇宙经历过一段加速膨胀的阶段, 则这些问题可以得到解决<sup>[1-5]</sup>。Alan Guth 将此阶段称为“暴胀宇宙(inflationary universe)”, 沿用至今。人们随即发现, 暴胀时期产生的亚视界尺度的量子涨落被空间的加速膨胀拉伸到宏观尺度上, 可以作为

现在宇宙中观测到的密度扰动不均匀性的初条件<sup>[6]</sup>。这个扰动早在六七十年代就已经在星系宇宙学被发现，随后的微波背景辐射各向异性更是在百分之几的水平上确认了这个原初曲率扰动的值是 $10^{-5}$ 左右<sup>[36]</sup>。

作为最早提出宇宙早期加速膨胀概念的人之一，Alex Staorbinsky 立即意识到加速膨胀能够在可观测的尺度上产生引力波，并估算了它在大尺度上的振幅<sup>[9]</sup>。简而言之，张量扰动 $h_{ij}$ 满足无源的运动方程：

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{\nabla^2}{a^2} h_{ij} = 0, \quad (6)$$

其中 $H$ 在暴胀期间几乎不变。明显可以看出，在扰动尺度远大于视界尺度 $1/H$ 的情况下( $\nabla \ll aH$ )，(6)式有一个不随时间变化的常数解。根据量子化的初条件，这个值大概是 $H/M_{\text{Pl}}$ 。笔者在一次学术会议上听到著名宇宙学家 Rocky Kolb 对此有一个“夜航船”式的推导：根据引力波的能量密度表达式(4)，暴胀期间一块哈勃区域内的能量不确定度为

$$\Delta E \sim \rho_{\text{GW}} H^{-3} \sim M_{\text{Pl}}^2 (h_{ij})^2 H^{-1}, \quad (7)$$

再根据不确定性原理及 $\Delta t \sim H^{-1}$ 立即就可以得到原初张量扰动的功率谱为

$$\mathcal{P}_h \approx \left\langle \sum_{i,j=1}^3 h_{ij} h_{ij} \right\rangle = \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{H}{M_{\text{Pl}}} \right)^2. \quad (8)$$

公式最右边已经按照标准的正则量子化方法算出的精确结果补上了估算缺失的系数。由此可以看出，原初张量扰动谱由暴胀时期的哈勃参数唯一确定，因此对它的观测可以确定暴胀发生的能标。由于共动曲率扰动 $\mathcal{R}$ 的功率谱已经观测到，通常用张标比 $r \equiv \mathcal{P}_h/\mathcal{P}_\rho$ 来表示张量扰动的功率谱幅度。目前 Planck 卫星对 B 模偏振的观测给出的最好限制是 $r < 0.06$ <sup>[36]</sup>。这意味着 $\mathcal{P}_h \lesssim 10^{-10}$ 。目前我国的阿里微波背景辐射偏振望远镜(AliCPT)也已经开始运行，可以通过扫描北半球的微波背景辐射 B 模偏振来探测原初张量扰动及其偶极不对称性<sup>[37, 38]</sup>。精确测量原初张量扰动的大小是早期宇宙学最重要的观测挑战。

(8)式描述的近似常数的张量扰动一旦进入视界，就要开始演化。此时 $\nabla \gg aH$ ， $h_{ij}$ 开始振荡，且振幅反比于 $a$ 衰减。不过由于引力波和辐射的能量密度都反比于 $a^4$ 衰减，因此 $\Omega_{\text{GW}}$ 在辐射为主的阶段保持不变。到了物质为主时期， $\rho_{\text{tot}} \sim \rho_{\text{dm}} \propto a^{-3}$ ，因此引力波能谱按照 $1/a$ 衰减。从辐射为主时期到现在，衰减掉的红移因子是 $z_{\text{eq}} \sim 3400$ ；暗能量主导时期它按照 $a^{-4}$ 衰减，但这个时期持续很短，衰减因子是 $(\Omega_\Lambda/\Omega_m)^{4/3} \sim 2.7$ 。合起来的结果是，频率大于 $10^{-16}$  Hz 的引力波的幅度为

$$\Omega_{\text{GW}} \sim \frac{\mathcal{P}_h}{z_{\text{eq}}} \left( \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{-4/3} \sim 10^{-5} \mathcal{P}_h \sim 10^{-15}, \quad (9)$$

且这个值基本不随频率变化。更加准确的原初引力波的能谱计算要考虑到张量扰动的精确解、进视界时刻的相对论性自由度数、进视界后的转移函数、中微子自由冲流的各向异性作为源项等细节。换句话说在遥远的未来，如果人类能够直接观测到原初引力波能谱，则其振幅上的微小起伏可用于探测早期宇宙的各种复杂

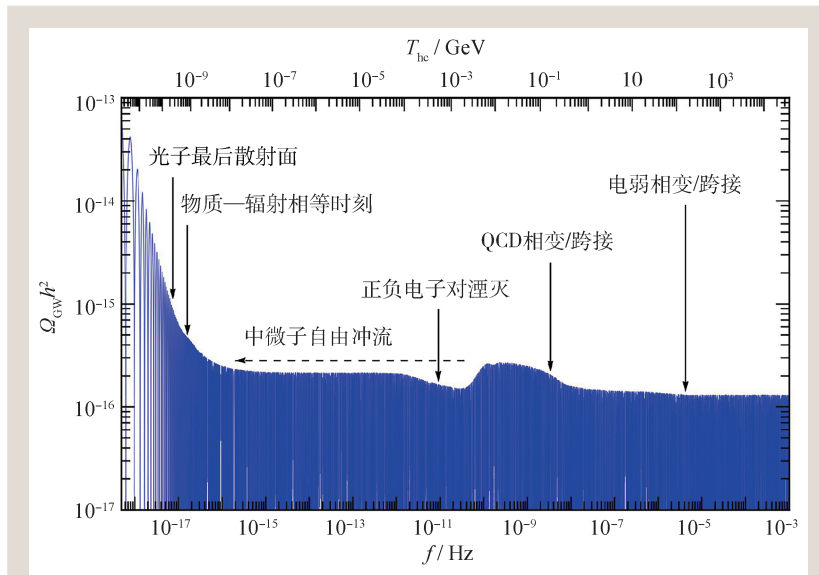


图1 考虑到 $H$ 随着宇宙热历史的演化，解析结合数值计算求解(3)式并代入(5)式计算得到的标准宇宙学模型中的原初引力波能谱<sup>[43]</sup>。可以看到，大于 $f_{\text{eq}} \approx 1.66 \times 10^{-17}$  Hz 时能谱几乎是标度不变的，即能谱几乎不随频率变化，其大小符合(9)式的估算结果

演化过程和新物理。具体可参考[39—43]等文献中的结果。我们在图1中复制了文献[43]中给出的原初引力波能谱的精确结果。

根据(9)式的估算结果，原初引力波能谱在主要可探测频段上小于 $10^{-15}$ ，而现有的引力波探测技术很难达到这个灵敏度。从探测的角度考虑，需要引入一些新物理相关的增强机制，例如原初张量蓝谱、超相对论性物态主导阶段等。另外一种思路就是在(3)式中考虑次级的源项。我们接下来就介绍这个机制。

#### 4 原初曲率扰动诱导的次级引力波

由于真空涨落产生的原初引力波的振幅很小，我们需要考虑一些通过源项增强的引力波。例如，原初流体的能流的二次型可以构建各向异性的应力张量，因此可以作为引力波的源。而这个能流是由之前已经谈到过的标量形式的原初扰动(曲率扰动)产生出来的，因此等价于用曲率扰动梯度的二次型——曲率扰动的四极矩——作为引力波的源项。这样产生的张量扰动称为标量诱导的次级引力波<sup>[44—52]</sup>。类似地，矢量场(例如原初磁场或暗光子)和张量扰动(例如暗引力子)也都可以诱导出次级引力波。本文中我们仅介绍原初标量扰动的例子，因为它最简单，而且在观测上也最重要。

我们先不管类似于谱卷积、转移函数、角积分之类的具体计算细节，根据这种引力波的“次级”耦合特性，以及它们主要是在重入视界时刻前后产生出来的事实，就可以估算出其产生时刻的能谱约为 $\mathcal{P}_\mathcal{R}^2$ 。产生之后，引力波随着背景辐射一起衰减，因此它在今天的能谱可以估算为

$$\Omega_{\text{GW}}^{(2)} \sim \frac{\mathcal{P}_\mathcal{R}^2}{z_{\text{eq}}} \left( \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{-4/3} \sim 10^{-5} \mathcal{P}_\mathcal{R}^2. \quad (10)$$

其中 $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ 是曲率扰动 $\mathcal{R}$ 的原初功率谱。观测结果告诉我们，在大于1 Mpc的尺度上有 $\mathcal{P}_\mathcal{R} \sim 10^{-9}$ ，且这个谱是近似标度不变和高斯型的<sup>[53]</sup>。如果认为这个近标度不变谱可以外推到小尺度去，则诱导引力波能谱为 $\Omega_{\text{GW}}^{(2)} \sim 10^{-23}$ ，远低于(9)式给出的原初引力波能谱<sup>[52]</sup>，仍然是难以观测的。然而，由

于观测上原初曲率扰动在小尺度几乎没有限制，因此可以考虑一些在小尺度增强原初曲率扰动的模型，使其爬升到 $\mathcal{P}_\mathcal{R} \sim 10^{-2}$ 的水平并产生可观测的次级引力波。用(10)式简单的估算可以给出其次级引力波能谱为

$$\Omega_{\text{GW}}^{(2)} \sim 10^{-9}. \quad (11)$$

这样的信号就很容易在空间引力波探测器、下一代脉冲星测时阵列、下一代地面引力波探测器上被观测到了。

小尺度上增强的曲率扰动功率谱还可能产生另外一种奇妙的天体——原初黑洞。目前的黑洞形成理论一般都认为，大质量恒星内部的物质通过聚变反应燃烧殆尽之后，残余的辐射压无法维持其体积，因此部分物质会向恒星内部坍缩，并在超过奥本海默极限之后形成极其致密、以至于光也无法逃逸的天体——黑洞。这一类黑洞在宇宙中大量存在，几十年来已经为X射线、引力波、射电等多波段观测所证实。除此之外，还有一种不需要恒星坍缩也可以形成的黑洞，即原初黑洞。它是在早期宇宙中由较大的曲率扰动直接导致的引力坍缩产生的<sup>[54—59]</sup>。形成大量原初黑洞同样需要在小尺度上增强曲率扰动的功率谱，因此它们和曲率扰动诱导的次级引力波是两种互有联系并可以交叉检验的现象。原初黑洞的形成和曲率扰动诱导的次级引力波的产生都发生在增强的曲率扰动模刚进入哈勃视界的那段时间，因此前者的质量和后者的波长都由这个时刻的视界尺度决定。它们满足如下关系<sup>[60]</sup>：

$$f_{\text{IGW}} \approx 3 \text{ Hz} \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{10^{16} \text{ g}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

目前的观测限制表明，质量约等于小行星质量( $10^{16} \text{ g}$ 到 $10^{22} \text{ g}$ )的原初黑洞可以在宇宙中大量存在，甚至可以作为全部暗物质。此类原初黑洞的施瓦西半径只有飞米(fm)到纳米的量级，无法用光学手段(微引力透镜效应)观测。万幸的是，它们对应的次级引力波的峰值频率大概是 $10^{-3}$ —0.1 Hz左右，正好落在空间引力波探测器的频段。具体计算表明，在高斯统计的情况下，原初黑洞作为全部暗物质所需的原初功率谱大概是 $\mathcal{P}_\mathcal{R} \sim 10^{-2}$ 。通过(10)式可估算出其对应的诱导引力波能谱为

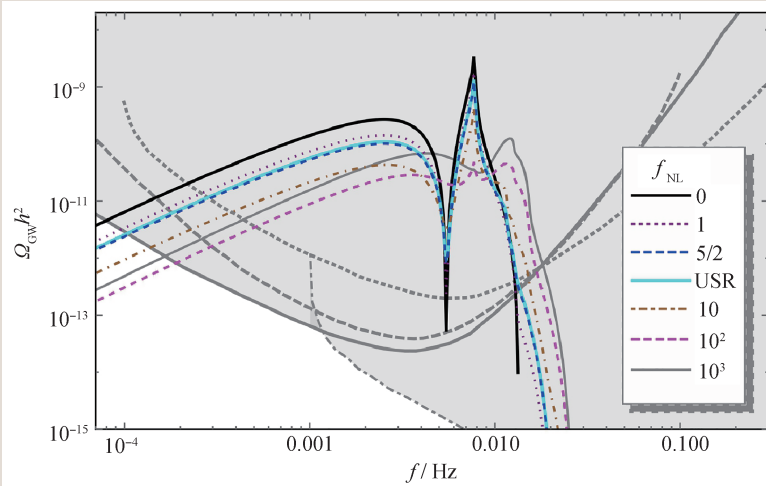


图2 曲率扰动功率谱存在窄峰且当质量约为  $10^{-12} M_{\odot}$  的原初黑洞组成全部暗物质时, 对应的次级引力波能谱。黑色粗线是高斯分布的情况, 彩色点线、虚线等是非高斯分布的情况, 取了不同的非线性参数  $f_{\text{NL}}$ 。USR 代表超慢滚暴胀。这些曲线按照文献[72]中给出的代码<sup>[73]</sup>绘制。图中也给出了LISA(灰色粗线)<sup>[74]</sup>、太极(灰色虚线)<sup>[75]</sup>、天琴(灰色点线)<sup>[76, 77]</sup>、DECIGO(灰色细线)<sup>[25]</sup>的设计功率谱律积分灵敏度曲线

$\Omega_{\text{GW}} \sim 10^{-9}$ , 处于空间引力波干涉仪 LISA、太极、天琴的探测范围之内。最近的发展表明, 在常见的平方展开非高斯和对数式非高斯的情况下, 考虑曲率扰动的非高斯概率分布并不会显著改变次级引力波信号的幅度<sup>[61, 62]</sup>。这主要是因为原初黑洞丰度由概率分布函数的尾部决定, 而次级引力波振幅主要是由概率分布函数的宽度(即方差)决定的。总而言之, 探测原初黑洞暗物质是空间引力波探测项目的重要科学目标, 这一点在 LISA 的科学白皮书和历年的工作报告<sup>[63–68]</sup>、太极科学白皮书<sup>[69]</sup>、天琴科学白皮书<sup>[23]</sup>中都有详细说明, 此处就不再赘述了。我们在图2中画出了原初黑洞作为全部暗物质时, 窄曲率扰动功率谱产生的次级引力波的典型信号, 并考虑了非高斯分布。有关诱导引力波的更多讨论可以参考一些相关的综述文章, 例如[70]以及[71]中的相关章节。

## 5 结论及展望

起源于暴胀宇宙的随机引力波背景是多个引力波探测计划的重要科学目标。我们在本文中简要介绍了该领域的基本知识和近期发展, 主要包

括引力波能谱的定义、原初引力波的量子起源和振幅估算、标量诱导的次级引力波以及它与原初黑洞的关系等内容。

与 LIGO 观测到的引力波不同, 随机引力波能谱不随时间变化, 因此在时域的表现就像噪声。不过, 在频域, 它的谱形通常依赖于其引力波源的性质。因此在做信号识别之前, 必须要从理论上找到起源于极早期宇宙的引力波信号的谱形特征和信号识别方法。文中首先回顾了短波长近似下的引力波携带的能量密度及能谱的定义, 它是描述早期宇宙引力波的一个重要物理量。然后讨论了

暴胀宇宙学, 特别是起源于暴胀期间量子扰动的空间度规的横向无迹分量——它就是原初引力波的源。原初引力波是暴胀理论最重要的预言, 是暴胀存在的决定性证据。我们根据原初张量扰动的量子性质和引力波的波动方程估算了原初引力波今天在主要观测频段的幅度, 发现它小于  $10^{-15}$ , 因此在未来是很难探测的, 除非存在张量扰动蓝谱或者硬物态等较为奇异的新物理。

到下一阶, 曲率扰动的四极矩可以作为引力波的源项, 这称为曲率扰动诱导的次级引力波。如果小尺度上曲率扰动能够增强, 则这种次级引力波可能会超过原初引力波, 更早地被观测到。有趣的是, 增强的曲率扰动能够在宇宙极早期产生黑洞。其中, 小行星质量的原初黑洞是一种重要的暗物质候选者, 它对应的次级引力波信号落在毫赫兹频段, 因此探测该信号是空间引力波探测器的重要科学目标。

## 参考文献

- [1] Brout R, Englert F, Gunzig E. *Annals Phys.*, 1978, 115: 78
- [2] Guth A H. *Phys. Rev. D*, 1981, 23: 347
- [3] Starobinsky A A. *Phys. Lett.*, 1980, 91B: 99; *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.*, 1987, 3: 130

- [4] Linde A D. Phys. Lett. B, 1982, 108:389
- [5] Albrecht A, Steinhardt P J. Phys. Rev. Lett., 1982, 48:1220
- [6] Mukhanov V F, Chibisov G V. JETP Lett., 1981, 33:532; Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1981, 33:549
- [7] Aghanim N *et al* (Planck). Astron. Astrophys., 2020, 641:A5
- [8] Akrami Y *et al* (Planck). Astron. Astrophys., 2020, 641:A9
- [9] Starobinsky A A. JETP Lett., 1979, 30:682
- [10] Abbott B P *et al* (LIGO Scientific, Virgo). Phys. Rev. Lett., 2016, 116:061102
- [11] Abbott R *et al* (KAGRA, VIRGO, LIGO Scientific). Phys. Rev. X, 2023, 13:041039
- [12] Isaacson R A. Phys. Rev., 1968, 166:1263
- [13] Isaacson R A. Phys. Rev., 1968, 166:1272
- [14] Allen B, Romano J D. Phys. Rev. D, 1999, 59:102001
- [15] Romano J D, Cornish N J. Living Rev. Rel., 2017, 20:2
- [16] Abbott R *et al* (KAGRA, Virgo, LIGO Scientific). Phys. Rev. D, 2021, 104:022004
- [17] Amaro-Seoane P *et al*. GW Notes., 2013, 6:4
- [18] Amaro-Seoane P *et al*. Class. Quant. Grav., 2012, 29:124016
- [19] Amaro-Seoane P *et al* (LISA). 2017, arXiv: 1702.00786 [astro-ph.IM]
- [20] Barausse E *et al*. Gen. Rel. Grav., 2020, 52:81
- [21] Ruan W H, Guo Z K, Cai R G *et al*. Int. J. Mod. Phys. A, 2020, 35:2050075
- [22] Luo J *et al* (TianQin). Class. Quant. Grav., 2016, 33:035010
- [23] Luo J *et al* (The TianQin Project). 2025, arXiv:2502.20138 [gr-qc]
- [24] Crowder J, Cornish N J. Phys. Rev. D, 2005, 72:083005
- [25] Kawamura S *et al*. Class. Quant. Grav., 2011, 28:094011
- [26] Agazie G *et al* (NANOGrav). Astrophys. J. Lett., 2023, 951:L8
- [27] Agazie G *et al* (NANOGrav). Astrophys. J. Lett., 2023, 951:L9
- [28] Antoniadis J *et al* (EPTA). Astron. Astrophys., 2023, 678:A50
- [29] Antoniadis J *et al* (EPTA). Astron. Astrophys., 2023, 678:A48
- [30] Antoniadis J *et al* (EPTA). 2023, arXiv:2306.16227[astro-ph.CO]
- [31] Zic A *et al*. 2023, arXiv:2306.16230 [astro-ph.HE]
- [32] Reardon D J *et al*. Astrophys. J. Lett., 2023, 951:L6
- [33] Reardon D J *et al*. Astrophys. J. Lett., 2023, 951:L7
- [34] Xu H *et al*. Res. Astron. Astrophys., 2023, 23:075024
- [35] Miles M T *et al*. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2024, 536:1467
- [36] Aghanim N *et al* (Planck). Astron. Astrophys., 2020, 641:A6  
[Erratum: Astron. Astrophys., 2021, 652:C4]
- [37] Li Y P, Liu Y, Li S Y *et al*. 2017, arXiv:1709.09053 [astro-ph.IM]
- [38] Li H *et al*. Natl. Sci. Rev., 2019, 6:145
- [39] Turner M S, White M J, Lidsey J E. Phys. Rev. D, 1993, 48:4613
- [40] Boyle L A, Steinhardt P J. Phys. Rev. D, 2008, 77:063504
- [41] Watanabe Y, Komatsu E. Phys. Rev. D, 2006, 73:123515
- [42] Kuroyanagi S, Chiba T, Sugiyama N. Phys. Rev. D, 2009, 79:103501
- [43] Saikawa K, Shirai S. JCAP, 2018, 05:035
- [44] Matarrese S, Pantano O, Saez D. Phys. Rev. D, 1993, 47:1311
- [45] Matarrese S, Pantano O, Saez D. Phys. Rev. Lett., 1994, 72:320
- [46] Matarrese S, Mollerach S, Bruni M. Phys. Rev. D, 1998, 58:043504
- [47] Noh H, Hwang J C. Phys. Rev. D, 2004, 69:104011
- [48] Carbone C, Matarrese S. Phys. Rev. D, 2005, 71:043508
- [49] Nakamura K. Prog. Theor. Phys., 2007, 117:17
- [50] Ananda K N, Clarkson C, Wands D. Phys. Rev. D, 2007, 75:123518
- [51] Osano B, Pitrou C, Dunsby P *et al*. JCAP, 2007, 04:003
- [52] Baumann D, Steinhardt P J, Takahashi K *et al*. Phys. Rev. D, 2007, 76:084019
- [53] Akrami Y *et al* (Planck). Astron. Astrophys., 2020, 641:A10
- [54] Zel'dovich I D, Novikov Ya. B. Soviet Astron. AJ (Engl. Transl.), 1967, 10:602
- [55] Hawking S. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1971, 152:75
- [56] Carr B J, Hawking S. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1974, 168:399
- [57] Meszaros P. Astron. Astrophys., 1974, 37:225
- [58] Carr B J. Astrophys. J., 1975, 201:1
- [59] Khlopov M, Malomed B, Zeldovich I. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1985, 215:575
- [60] Saito R, Yokoyama J. Phys. Rev. Lett., 2009, 102:161101  
[Erratum: Phys. Rev. Lett., 2011, 107:069901]
- [61] Cai R G, Pi S, Sasaki M. Phys. Rev. Lett., 2019, 122:201101
- [62] Pi S. 2025, arXiv:2404.06151 [astro-ph.CO]
- [63] Seoane P A *et al* (LISA). Living Rev. Rel., 2023, 26:2
- [64] Arun K G *et al* (LISA). Living Rev. Rel., 2022, 25:4
- [65] Bartolo N *et al* (LISA Cosmology Working Group). JCAP, 2022, 11:009
- [66] Auclair P *et al* (LISA Cosmology Working Group). Living Rev. Rel., 2023, 26:5
- [67] Bagui E *et al* (LISA Cosmology Working Group). 2023, arXiv:2310.19857 [astro-ph.CO]
- [68] Gammal J E *et al* (LISA Cosmology Working Group). JCAP, 2025, 05:062
- [69] Wu Y L *et al* (The Taiji Program). To appear
- [70] Domènech G. 2024, arXiv:2402.17388 [gr-qc]
- [71] Byrnes C, Franciolini G, Harada T *et al* (eds.). Primordial Black Holes, Springer Series in Astrophysics and Cosmology. Springer, 2025
- [72] Adshead P, Lozanov K D, Weiner Z J. JCAP, 2021, 10:080
- [73] Adshead P, Lozanov K, Weiner Z. Nsgsigw-results, 2023, <https://zenodo.org/records/8176108>
- [74] Bartolo N *et al*. JCAP, 2016, 12:026
- [75] Wang G, Han W B. 2021, arXiv:2108.11151 [gr-qc]
- [76] Liang Z C, Hu Y M, Jiang Y *et al*. 2021, arXiv:2107.08643 [astro-ph.CO]
- [77] Luo J, An H P, Bian L G *et al*. 2025, arXiv:2502.20138